개념원리 수학(하) 71쪽

## 유형 09 명제의 대우를 이용하여 상수 구하기

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 반드시 참이다.

(2) 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 할 때

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 $\begin{cases} P \subset Q\text{이면 참} \\ P \not\subset Q\text{이면 거짓} \end{cases}$

**0251** 대표문제

명제 '$x^2-kx+6\neq0$이면 $x-1\neq0$이다.'가 참이 되도록 하는 상수 $k$의 값을 구하시오.

**0252** 상중하

두 조건 $p$ : $x<a$, $q$ : $-3<x<2$에 대하여 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되게 하는 실수 $a$의 최솟값을 구하시오.

**0253** 상중하

명제 '$|x-a|\geq5$이면 $|x-2|\geq3$이다.'가 참이 되게 하는 정수 $a$의 개수를 구하시오.

**0254** 상중하

두 실수 $x$, $y$에 대하여 명제 '$x+y<a$이면 $2x<7$ 또는 $y<-2$이다.'가 참일 때, 정수 $a$의 최댓값을 구하시오.

개념원리 수학(하) 71쪽

## 중요 유형 10 삼단논법

명제 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 참이면 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

**0255** 대표문제

명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \longrightarrow \sim r$ ② $\sim q \longrightarrow \sim p$ ③ $r \longrightarrow \sim q$
④ $\sim p \longrightarrow r$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

**0256** 상중하

세 조건 $p$, $q$, $r$에 대하여 $r \longrightarrow p$와 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 **보기** 중 참인 명제인 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $q \longrightarrow p$ ㄴ. $r \longrightarrow \sim q$ ㄷ. $q \longrightarrow r$
ㄹ. $p \longrightarrow q$ ㅁ. $p \longrightarrow r$

**0257** 상중하

참인 세 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow s$, $\boxed{\phantom{xx}}$로부터 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이라는 결론을 얻었다. 다음 명제 중 $\boxed{\phantom{x}}$ 안에 알맞은 것은?

① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow s$ ③ $\sim s \longrightarrow p$
④ $\sim r \longrightarrow p$ ⑤ $\sim p \longrightarrow \sim s$

**0258** 상중하

전체집합 $U$의 공집합이 아닌 세 부분집합 $P$, $Q$, $R$가 각각 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합이고 두 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$와 $r \longrightarrow q$가 참일 때, 다음 **보기** 중 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $P\cap Q\neq\varnothing$
ㄴ. $R\subset(P\cap Q)^C$
ㄷ. $(P^C\cap Q^C)\subset R^C$

개념원리 수학(하) 77~78쪽

## 중요 유형 11 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

(1) $p \Longrightarrow q$ : $\begin{cases} p\text{는 } q\text{이기 위한 충분조건} \\ q\text{는 } p\text{이기 위한 필요조건} \end{cases}$

(2) $p \Longleftrightarrow q$ : $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건

(3) 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 할 때, $p$는 $q$이기 위한

충분조건 : $P \subset Q$, 필요조건 : $Q \subset P$, 필요충분조건 : $P=Q$

**0259** 대표문제

다음 중 $p$가 $q$이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, $x$, $y$, $z$는 실수이다.)

① $p : x^2=4$ $\quad q : x=2$

② $p : x \geq 1$이고 $y \geq 1$ $\quad q : x+y \geq 2$

③ $p : x=y$ $\quad q : xz=yz$

④ $p : x=2,\ y=3$ $\quad q : xy=6$

⑤ $p : x<1$ $\quad q : x \leq 2$

**0260** 상중하

다음 **보기** 중 $x=y=0$이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고르시오. (단, $x$, $y$는 실수이다.)

보기

ㄱ. $xy=0$ ㄴ. $|x|+|y|=0$

ㄷ. $x+y=0$ ㄹ. $x^2+y^2=0$

**0261** 상중하

다음 **보기** 중 $p$가 $q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a$, $b$, $c$는 실수이다.)

보기

ㄱ. $p : a>1,\ b>1$ $\quad q : ab+1>a+b$

ㄴ. $p : (a-b)(b-c)=0$ $\quad q : a=b=c$

ㄷ. $p : a>b$이고 $b>c$ $\quad q : a>c$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념원리 수학(하) 79쪽

## 중요 유형 12 충분조건, 필요조건이 되는 상수 구하기

(i) 각 조건의 진리집합의 포함 관계를 수직선 위에 나타낸다.

(ii) 각 조건에 맞는 상수의 값 또는 범위를 구하되 등호가 포함되는지 주의한다.

**0262** 대표문제

세 조건 $p : -1<x<2$ 또는 $x>3$, $q : x>a$, $r : x>b$에 대하여 $q$는 $p$이기 위한 필요조건이고, $r$는 $p$이기 위한 충분조건일 때, $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값의 합을 구하시오.

(단, $a$, $b$는 실수이다.)

**0263** 상중하 서술형

$x^2-6x+8<0$이 $-2<x-a<2$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 $a$의 개수를 구하시오.

**0264** 상중하

$x-3 \neq 0$은 $x^2+ax-12 \neq 0$이기 위한 필요조건일 때, 실수 $a$의 값은?

① $-7$ ② $-4$ ③ $-1$

④ $1$ ⑤ $4$

**0265** 상중하

두 조건 $p : a \leq x \leq a+2$, $q : x<5$ 또는 $x>9$에 대하여 $\sim p$는 $q$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 $a$의 값의 합을 구하시오.

개념원리 수학(하) 80쪽

## 유형 13 충분조건, 필요조건과 진리집합 사이의 관계

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 할 때
(1) $p$는 $q$이기 위한 충분조건 $\Longleftrightarrow P\subset Q$
(2) $p$는 $q$이기 위한 필요조건 $\Longleftrightarrow Q\subset P$
(3) $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건 $\Longleftrightarrow P=Q$

**0266** 대표문제

전체집합 $U$에서 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자. $p$는 $q$이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P\cap Q=P$　② $P\cup Q=U$　③ $P\cap Q^C=\varnothing$
④ $P\cup Q^C=U$　⑤ $P^C-Q=\varnothing$

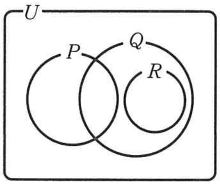
**0267** 상중하

세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라 하자. $r$가 $p$ 또는 $q$이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $(P\cup Q)\cap R=R$
② $(P\cup Q)\cap R^C=R$
③ $(P^C\cup Q^C)\cap R=R$
④ $(P^C\cup Q^C)\cap R^C=\varnothing$
⑤ $(P\cap R)\cap Q=R$

**0268** 상중하

다음은 전체집합 $U$에 대하여 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합 $P$, $Q$, $R$의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸 것이다. 다음 **보기** 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.




보기
ㄱ. $q$는 $r$이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $p$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

개념원리 수학(하) 80쪽

## 유형 14 충분조건, 필요조건과 삼단논법

$p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow r$이면 $p \Longrightarrow r$이다.

**0269** 대표문제

세 조건 $p$, $q$, $r$에 대하여 $p \longrightarrow q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 **보기** 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $q$는 $p$이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. $r$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $p$는 $r$이기 위한 충분조건이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**0270** 상중하

세 조건 $p$, $q$, $r$에 대하여 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이고, $\sim q$는 $r$이기 위한 필요조건일 때, 다음 명제 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \longrightarrow \sim r$　② $q \longrightarrow \sim r$　③ $\sim q \longrightarrow \sim p$
④ $r \longrightarrow \sim p$　⑤ $\sim r \longrightarrow q$

**0271** 상중하

조건 $p$, $q$, $r$, $s$에 대하여 $p$는 $q$이기 위한 충분조건, $r$는 $s$이기 위한 필요조건, $s$는 $q$이기 위한 필요조건, $q$는 $r$이기 위한 필요조건일 때, $q$는 $s$이기 위한 $\boxed{\phantom{00}}$조건이고, $s$는 $p$이기 위한 $\boxed{\phantom{00}}$조건이다. 이때 □ 안에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 필요충분　② 필요충분, 충분
③ 필요, 충분　④ 필요충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

개념원리 수학(하) 84쪽

## 유형 15 대우를 이용한 증명

대우를 이용한 증명법 : 주어진 명제의 대우가 참임을 보임으로써 그 명제가 참임을 증명하는 방법

**0272** 대표문제

다음은 명제 '$a$, $b$, $c$가 양의 정수일 때, $a^2+b^2=c^2$이면 $a$, $b$, $c$ 중 적어도 하나는 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

증명

주어진 명제의 대우는 '$a$, $b$, $c$가 양의 정수일 때, $a$, $b$, $c$가 $\boxed{(가)}$이면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.'이다.
$a$, $b$, $c$가 $\boxed{(가)}$이면 $a^2$, $b^2$, $c^2$은 모두 홀수이므로 $a^2+b^2$은 $\boxed{(나)}$, $c^2$은 $\boxed{(다)}$가 되어 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

**0273** 상 중 하

다음은 명제 '자연수 $n$에 대하여 $n^2$이 3의 배수이면 $n$도 3의 배수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

증명

주어진 명제의 $\boxed{(가)}$는
'자연수 $n$에 대하여 $n$이 3의 배수가 아니면 $n^2$도 3의 배수가 아니다.'이다.
$n$이 3의 배수가 아니면
$n=\boxed{(나)}$ 또는 $n=3k-1$ ($k$는 자연수)로 놓을 수 있다.
(i) $n=\boxed{(나)}$일 때, $n^2=3(\boxed{(다)})+1$
(ii) $n=3k-1$일 때, $n^2=3(\boxed{(라)})+1$
즉 $n^2$은 3으로 나누면 나머지가 1인 자연수가 되므로 $n$이 3의 배수가 아니면 $n^2$도 3의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제의 $\boxed{(가)}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명 과정에서 (가)~(라)에 알맞은 것을 써넣으시오.

개념원리 수학(하) 85쪽

## 유형 16 귀류법을 이용한 증명

귀류법 : 결론을 부정하여 명제의 가정이나 이미 알려진 사실에 모순됨을 보임으로써 명제가 참임을 증명하는 방법

**0274** 대표문제

다음은 명제 '자연수 $n$에 대하여 $n^2$이 홀수이면 $n$도 홀수이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.

증명

$n$이 $\boxed{(가)}$라 하면
$n=\boxed{(나)}$ ($k$는 자연수)로 놓을 수 있으므로
$n^2=2(\boxed{(다)})$
즉 $n^2$은 $\boxed{(라)}$이다.
그런데 이것은 $n^2$이 $\boxed{(마)}$라는 가정에 모순이다.
따라서 $n^2$이 홀수이면 $n$도 $\boxed{(바)}$이다.

위의 증명 과정에서 (가)~(바)에 알맞은 것을 써넣으시오.

**0275** 상 중 하

다음은 $\sqrt{2}$가 무리수임을 이용하여 $3+\sqrt{2}$도 무리수임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.

증명

$3+\sqrt{2}$를 $\boxed{(가)}$라 하면 $3+\sqrt{2}$와 $-3$은 모두 $\boxed{(나)}$이고
$(3+\sqrt{2})+(-3)=\sqrt{2}$는 $\boxed{(다)}$이다.
그런데 이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{(라)}$라는 사실에 모순이다.
따라서 $3+\sqrt{2}$는 $\boxed{(마)}$이다.

위의 증명 과정에서 (가)~(마)에 알맞은 것을 써넣으시오.

**0276** 상 중 하

명제 '실수 $a$, $b$에 대하여 $a+b<0$이면 $a$, $b$ 중 적어도 하나는 음수이다.'가 참임을 귀류법으로 증명하시오.

중요 유형 17 수 또는 식의 대소 관계

개념원리 수학(하) 89쪽

(1) $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$, $A-B=0 \Longleftrightarrow A=B$
$A-B<0 \Longleftrightarrow A<B$
(2) $A>0$, $B>0$일 때 $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A>B$
⇨ 근호($\sqrt{\ }$)와 절댓값 기호 ($|\ \ |$)가 있을 때

**0277** 대표문제

$a \geq b>0$인 실수 $a$, $b$에 대하여 $A=\dfrac{3a}{1+3a}$, $B=\dfrac{3b}{1+3b}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B$ ② $A \leq B$ ③ $A>B$
④ $A \geq B$ ⑤ $A=B$

**0278** 상중하

실수 $a$, $b$에 대하여 $a>b>0$일 때, 다음 **보기** 중 대소 관계가 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+1}{b+1}$ ㄴ. $\dfrac{a}{b^2}>\dfrac{b}{a^2}$
ㄷ. $\dfrac{1+b}{1+a}<\dfrac{1+a}{1+b}$

**0279** 상중하

실수 $a$, $b$에 대하여
$$A=|a-b|,\ B=|a|-|b|,\ C=|a|+|b|$$
의 대소 관계를 나타내시오.

유형 18 절대부등식의 증명

개념원리 수학(하) 90쪽

부등식 $A \geq B$를 증명할 때에는
(1) 다항식 ⇨ $A-B$를 완전제곱식으로 변형하여 $(\text{실수})^2 \geq 0$임을 이용한다.
(2) 절댓값 기호를 포함한 식 ⇨ $A^2-B^2$으로 변형한다.
특히 등호가 있을 때에는 등호가 성립하는 경우를 분명히 밝혀야 한다.

**0280** 대표문제

다음은 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$임을 증명하는 과정이다.

증명

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$
$=a-2\sqrt{ab}+b=(\boxed{(가)})^2 \geq 0$
즉 $\{\sqrt{2(a+b)}\}^2 \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$이므로
$\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
이때 등호는 $\boxed{(나)}$일 때 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으시오.

**0281** 상중하

다음은 $x$, $y$, $z$가 양의 실수일 때, $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$임을 증명하는 과정이다.

증명

$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)(\boxed{(가)}-2xy-2yz-2zx)$
$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+\boxed{(나)}\}$
이때 $x$, $y$, $z$가 실수이므로
$(x-y)^2 \geq 0$, $(y-z)^2 \geq 0$, $\boxed{(나)} \geq 0$
따라서 $x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$이므로
$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$
이때 등호는 $\boxed{(다)}$일 때 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으시오.

중요 유형 19 곱과 합이 일정할 때의 산술평균과 기하평균의 관계

개념원리 수학(하) 91쪽

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

① $a+b$가 일정 ⇨ $ab$는 $a=b$일 때 최댓값을 갖는다.

② $ab$가 일정 ⇨ $a+b$는 $a=b$일 때 최솟값을 갖는다.

**0282** 대표문제

$a>0$, $b>0$이고 $2a+3b=12$일 때, $ab$의 최댓값과 그때의 $a$, $b$의 값을 구하시오.

**0283** 상중하

$a>0$, $b>0$에 대하여 $ab=4$일 때, $2a+4b$의 최솟값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $8\sqrt{2}$

**0284** 상중하

양수 $a$, $b$에 대하여 $a+b=1$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값을 구하시오.

**0285** 상중하

0이 아닌 실수 $a$, $b$에 대하여 $a^2+b^2=12$일 때, $ab$의 최솟값을 구하시오.

유형 20 식의 변형을 이용한 산술평균과 기하평균의 관계

개념원리 수학(하) 92쪽

두 식의 곱이 상수가 되도록 식을 적당히 변형한다.

⇨ $f(x)+\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)>0)$의 꼴로 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

**0286** 대표문제

$x>-1$일 때, $x+\frac{4}{x+1}$의 최솟값을 $m$, 그때의 $x$의 값을 $n$이라 하자. 이때 $m+n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

**0287** 상중하

양수 $a$, $b$에 대하여 $a+b+\frac{1}{a}+\frac{9}{b}$의 최솟값을 구하시오.

**0288** 상중하

$a>1$일 때, $9a-1+\frac{1}{a-1} \geq k$가 항상 성립하기 위한 $k$의 최댓값은?

① 8 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 16

**0289** 상중하

$x>3$일 때, $\frac{x^2-3x+4}{x-3}$의 최솟값을 구하시오.

정답과 풀이 31쪽

개념원리 수학(하) 92쪽

## 중요 유형 21 두 식의 곱의 최솟값 ; 산술평균과 기하평균의 관계

주어진 식을 전개한 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구한다.

**0290** 대표문제

양수 $x$, $y$에 대하여 $\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

**0291** 상중하

$a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$일 때, $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)$의 최솟값을 구하시오.

**0292** 상중하

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $(a+3b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{3b+c}\right)$의 최솟값을 구하시오.

**0293** 상중하 서술형

양수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$의 최솟값을 구하시오.

개념원리 수학(하) 93쪽

## 유형 22 코시-슈바르츠의 부등식

$a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$가 실수일 때

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{일 때 성립}\right)$

**0294** 대표문제

실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+4y^2=4$일 때, $x+4y$의 최댓값은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

**0295** 상중하

실수 $x$, $y$, $z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=14$일 때, $x-2y+3z$의 최솟값을 구하시오.

**0296** 상중하

$x^2+y^2=a$를 만족시키는 실수 $x$, $y$에 대하여 $3x+2y$의 최댓값과 최솟값의 차가 13일 때, 양수 $a$의 값을 구하시오.

**0297** 상중하

실수 $x$, $y$에 대하여 $3x-y=3$일 때, $9x^2+4y^2$의 최솟값은?

① $\frac{28}{5}$ ② $\frac{32}{5}$ ③ $\frac{36}{5}$ ④ $\frac{41}{5}$ ⑤ $\frac{42}{5}$

정답과 풀이 33쪽

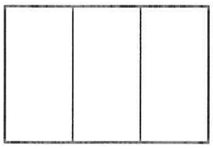
개념원리 수학(하) 94쪽

## 유형 23 산술평균과 기하평균의 관계의 활용

두 양수에 대하여 곱의 최댓값을 구하거나 합의 최솟값을 구할 때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 구할 수 있는지 살펴본다.

**0298** 대표문제

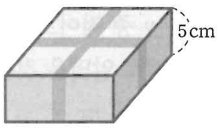
어떤 농부가 길이 40 m의 철망을 가지고 오른쪽 그림과 같이 세 개의 직사각형 모양으로 이루어진 우리를 만들려고 한다. 이때 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $40\text{ m}^2$ ② $50\text{ m}^2$ ③ $60\text{ m}^2$
④ $70\text{ m}^2$ ⑤ $80\text{ m}^2$

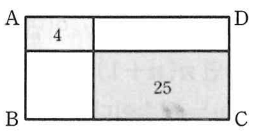
**0299** 상중하

높이가 5 cm인 직육면체 모양의 소포를 끈으로 오른쪽 그림과 같이 묶으려고 한다. 이때 길이가 100 cm인 끈으로 묶을 수 있는 소포의 최대 부피를 구하시오. (단, 매듭의 길이는 생각하지 않는다.)




**0300** 상중하

다음 그림에서 표시된 직사각형의 넓이가 4, 25로 일정할 때, 직사각형 ABCD의 넓이의 최솟값을 구하시오.



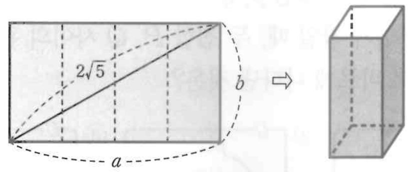

개념원리 수학(하) 94쪽

## 유형 24 코시-슈바르츠의 부등식의 활용

여러 문자의 제곱의 합과 일차식이 주어졌을 때, 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제에서 코시-슈바르츠의 부등식이 자주 활용된다.

**0301** 대표문제

다음 그림과 같이 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$이고 가로, 세로의 길이가 각각 $a$, $b$인 직사각형 모양의 종이를 4등분하여 점선에 맞게 접어서 두 밑면이 없는 직육면체 모양의 기둥을 만들려고 한다. 기둥의 모서리 12개의 길이의 합의 최댓값을 구하시오.

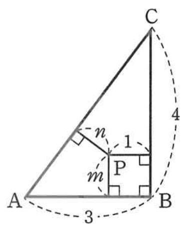



**0302** 상중하

대각선의 길이가 $2\sqrt{6}$인 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하시오.

**0303** 상중하

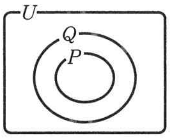
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 직각삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 길이가 1이고, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 길이가 각각 $m$, $n$일 때, $m^2+n^2$의 최솟값은?

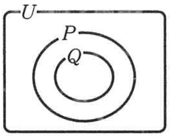


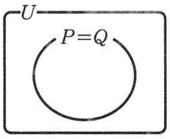

① $\frac{28}{17}$ ② $\frac{29}{17}$ ③ $\frac{30}{17}$
④ $\frac{31}{17}$ ⑤ $\frac{32}{17}$

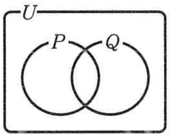
**0304**
명제 '$x^2-8x+12=0$의 해는 $x=2$ 또는 $x=6$이다.'의 부정을 말하시오.

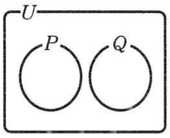
**0305**
전체집합 $U$에서 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자. $p \longrightarrow \sim q$가 참일 때, 두 집합 $P$, $Q$ 사이의 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤



**0306**
전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 두 조건 $p$, $q$가 각각
$p : 2\le x<5$, $q : 3<x\le 6$일 때, '$\sim p$이고 $q$'의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{4, 5\}$ ③ $\{5, 6\}$
④ $\{1, 6\}$ ⑤ $\{3, 4, 5\}$

**0307**
'어떤 실수 $x$에 대하여 $x^2-4x+5\le 0$이다.'의 부정을 말하고, 그 부정의 참, 거짓을 판별하시오.

**0308**
두 집합 $A$, $B$에 대하여 $(A\cup B)-A=B$가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A\subset B$ ② $B\subset A$ ③ $A=B$
④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A=\varnothing$

**0309**
네 개의 조건 $p$, $q$, $r$, $s$에 대하여
$p \Longrightarrow r$, $\sim q \Longrightarrow \sim r$, $q \Longrightarrow \sim s$
일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $s \longrightarrow \sim p$ ② $r \longrightarrow s$ ③ $\sim q \longrightarrow p$
④ $\sim s \longrightarrow r$ ⑤ $p \longrightarrow s$

**0310**
다음 중 $x$, $y$가 실수일 때, 명제 '$x+y$, $xy$가 모두 유리수이면 $x$, $y$ 중 적어도 하나는 유리수이다.'가 거짓임을 보이기 위한 반례로 알맞은 것은?

① $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$ ② $x=0$, $y=1$
③ $x=\sqrt{2}$, $y=0$ ④ $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$
⑤ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**0311**
다음 명제 중 그 대우가 참인 것은?

① 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다.
② 세 실수 $x$, $y$, $z$에 대하여 $xz=yz$이면 $x=y$이다.
③ 자연수 $n$이 짝수이면 $n(n+1)(n+2)$는 24의 배수이다.
④ $xy$가 정수이면 $x$, $y$는 정수이다.
⑤ 어떤 수가 무한소수이면 그 수는 무리수이다.

**0312** 중요!

$a>0$, $b>0$일 때, $\left(2a+\frac{1}{3b}\right)\left(\frac{1}{a}+6b\right)$의 최솟값은?

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 15

**0313** 중요!

다음 **보기** 중 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a$, $b$는 실수, $m$, $n$은 정수이다.)

**보기**

ㄱ. $p$ : $a=0$이고 $b=0$　$q$ : $a^2+b^2=0$
ㄴ. $p$ : 삼각형 ABC가 이등변삼각형이다.
　$q$ : 삼각형 ABC의 두 각의 크기가 같다.
ㄷ. $p$ : $m$과 $n$은 모두 짝수이다.
　$q$ : $m+n$은 짝수이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**0314**

세 조건

$p$ : $2x^2-x-1\neq0$, $q$ : $x-a\neq0$, $r$ : $bx^2-3x+5\neq0$

에 대하여 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이고 $q$는 $r$이기 위한 필요조건일 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

(단, $a>0$)

**0315** 중요!

양수 $x$, $y$에 대하여 $2x^2+8y^2=5$일 때, $xy$는 $x=\alpha$, $y=\beta$에서 최댓값 $\gamma$를 갖는다. 이때 $\alpha\beta+\gamma$의 값은?

① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

**0316**

세 조건 $p$, $q$, $r$에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 **보기** 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. $q$는 $p$이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. $r$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $p$는 $r$이기 위한 충분조건이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**0317**

다음 세 문장이 모두 참일 때, 반드시 참인 문장은?

(가) 수학을 좋아하는 학생은 창의적인 학생이다.
(나) 과학을 좋아하는 학생은 수학을 좋아하는 학생이다.
(다) 수학을 좋아하지 않는 학생은 적극적이지 않은 학생이다.

① 수학을 좋아하는 학생은 과학을 좋아하는 학생이다.
② 창의적인 학생은 과학을 좋아하는 학생이다.
③ 과학을 좋아하는 학생은 적극적인 학생이다.
④ 창의적이지 않은 학생은 적극적이지 않은 학생이다.
⑤ 창의적이지 않은 학생은 수학을 좋아하는 학생이다.

**0318**

세 조건 $p$: $|x-2|\leq a$, $q$: $x\leq b$, $r$: $|x|>4$에 대하여 $q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이고, $p$는 $\sim r$이기 위한 충분조건일 때, $b-a$의 최솟값을 구하시오.

(단, $a$, $b$는 실수이고, $a\geq0$이다.)

**0319**

다음은 실수 $x$, $y$에 대하여 명제 '$x+y$가 무리수이면 $x$, $y$ 중 적어도 하나는 무리수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

증명

주어진 명제의 대우를 구하면

$\boxed{\quad (가) \quad}$

$x$, $y$가 모두 유리수이면

$x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{d}{c}$ (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 정수, $a\neq0$, $c\neq0$)

로 놓을 수 있다. 이때

$x+y=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$

$bc+ad$와 $ac$는 $\boxed{(나)}$이고, $ac\neq0$이므로 $x+y$는 $\boxed{(다)}$이다.

따라서 주어진 명제의 $\boxed{(라)}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명 과정에서 (가)~(라)에 알맞은 것을 써넣으시오.

**0320**

전체집합 $U$에 대하여 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라 하자. $p$는 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이고, $r$는 $\sim p$이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P\cup Q=U$　② $R\subset P$
③ $R\cap Q^C=\varnothing$　④ $P\cap Q=\varnothing$
⑤ $P-R=P$

**0321**

$a$, $b$, $c$가 실수일 때, 다음 **보기** 중 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ (단, $a>0$, $b>0$, $c>0$)

ㄴ. $\sqrt{a-b}<\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (단, $a>b>0$)

ㄷ. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$)

**0322**

임의의 실수 $x$, $y$에 대하여 $a>0$, $b>0$, $a+b=1$일 때, 부등식 $ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$이 성립함을 증명하는 과정이다.

증명

$ax^2+by^2-(ax+by)^2$

$=ax^2+by^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a(1-a)x^2+b(1-b)y^2-2abxy$

$a+b=1$이므로

$ax^2+by^2-(ax+by)^2=\boxed{(가)}$

$=ab(x-y)^2$

$a>0$, $b>0$, $(x-y)^2\geq0$이므로

$ab(x-y)^2\geq0$이다.

따라서 $ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$이 성립한다.

이때 등호가 성립하는 경우는 $\boxed{(나)}$일 때이다.

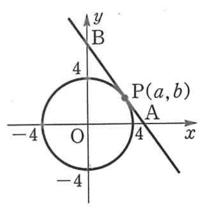
위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣으시오.

**0323**

둘레의 길이가 20인 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$, $y$라 하자. $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값을 $M$이라 할 때, $M^2$의 값을 구하시오.

**0324**

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 P$(a, b)$에서의 접선이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값을 구하시오.
(단, $a>0$, $b>0$이고, O는 원점이다.)



## 서술형 주관식

**0325**

명제 '$2x^2-ax+1\neq0$이면 $x\neq-1$이다.'가 참일 때, 실수 $a$의 값을 구하시오.

**0326**

실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+y^2=2$일 때, $2x+y$의 값의 범위는 $m\leq 2x+y\leq M$이다. 이때 $M^2+m^2$의 값을 구하시오.

**0327**

세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각
$P=\{x\mid -1\leq x\leq 3$ 또는 $x\geq 5\}$, $Q=\{x\mid x\geq a\}$,
$R=\{x\mid x\geq b\}$라 하자. $q$는 $p$이기 위한 필요조건이고, $r$는 $p$이기 위한 충분조건일 때, $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값의 합을 구하시오. (단, $a$, $b$는 실수이다.)

**0328**

$x>1$일 때, $\dfrac{x^2-2x+50}{x-1}$의 최솟값을 구하시오.

## 실력 UP

**0329**

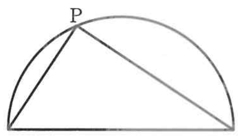
다음 중 집합 $A$, $B$, $C$에 대하여 $p$가 $q$이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $p:(A\cup B)\subset(A\cap B)$　$q:A=B$
② $p:A\cap(B\cap C)=A$　$q:A\cup(B\cup C)=B\cup C$
③ $p:A\cup(B\cap C)=A$　$q:A\cap(B\cup C)=B\cup C$
④ $p:A\cup B=A$　$q:B=\varnothing$
⑤ $p:A\cup(B-A)=B$　$q:A\subset B$

**0330**

지름의 길이가 20 m인 반원 모양의 마당에 그림과 같이 반원 위의 한 점 P를 잡아 지름의 양 끝과 연결하여 삼각형 모양의 연못을 만들려고 한다. 연못의 넓이의 최댓값을 $a$, 그때의 연못의 둘레의 길이를 $b+c\sqrt{2}$라 하자. $\dfrac{bc}{a}$의 값을 구하시오.

(단, $b$, $c$는 유리수이다.)




**0331**

전체집합 $U=\{x\mid x$는 한 자리 양의 홀수$\}$의 두 부분집합 $A$, $B$가 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) $(A\cup B)^C=\varnothing$
> (나) $(A\cap B)^C=\{1, 3, 7, 9\}$

집합 $X$의 모든 원소의 합을 $T(X)$라 할 때, $T(A)T(B)$의 최댓값을 구하시오.